32. Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten. Beachten Sie dabei auch die Symmetrieeigenschaft.

a) $\binom{14}{2}$, $\binom{30}{3}$, $\binom{25}{4}$, $\binom{33}{6}$, $\binom{100}{5}$

b) $\binom{15}{13}$, $\binom{30}{27}$, $\binom{47}{42}$, $\binom{65}{58}$, $\binom{100}{95}$

c) $\binom{75}{0}$, $\binom{54}{1}$, $\binom{86}{86}$, $\binom{97}{96}$, $\binom{300}{299}$

33. a) Auf wie viele Arten kann man drei Personen aus einer Gruppe von sechs Personen auswählen?

b) Fünf Eintrittskarten für eine Theatervorstellung sollen an die 25 Schüler einer Klasse verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

c) Die 35 Besucher einer Silvesterparty stoßen zum Jahreswechsel an, jeder mit jedem genau einmal. Wie oft klingen die Gläser?

34. Ein Bridgespiel besteht aus 52 Karten, von denen vier Asse sind. Man entnimmt 5 Karten. In wie vielen Fällen enthalten diese 5 Karten

a) kein Ass,
b) genau ein Ass,
c) mindestens ein Ass,
d) höchstens ein Ass?

35. Ein Prüfling muss in einer Prüfung 8 von 10 gestellten Fragen beantworten.

a) Wie viele Wahlmöglichkeiten hat er insgesamt?

b) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn er die ersten drei Fragen in jedem Fall beantworten muss?

36. Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten wird ein Stoß mit 13 Karten ausgewählt.

a) Wie viele Stöße gibt es insgesamt?

b) Wie viele Stöße gibt es, die keine Herzkarten enthalten?

Seite 199

40. Prüfen Sie, ob es sich um BERNOULLI-Experimente handelt.
    a) Werfen eines Würfels und Feststellen der Augenzahl.
    b) Werfen eines Würfels und Feststellen, ob die Augenzahl eine Primzahl ist.
    c) Ausgang eines Tennis-Spiels.
    d) Ergebnis eines Spiels der Fußball-Bundesliga.
    e) Sonntagsfrage vor einer Bundestagswahl: „Welche Partei würden Sie wählen, wenn am Sonntag Bundestagswahlen wären?"
    f) Endkontrolle bei der Fertigung von Mikrochips.

Seite 200

> **BERNOULLI-Kette**
>
> Ein mehrstufiges Zufallsexperiment, das aus n gleichen **BERNOULLI**-Experimenten mit der Trefferwahrscheinlichkeit p besteht, bezeichnet man als **BERNOULLI-Kette der Länge n mit dem Parameter p.**

Jakob BERNOULLI (1654 - 1705) war ein schweizer Mathematiker und Physiker und stammte aus einer verzweigten Gelehrtenfamilie.

Er forschte auf unterschiedlichen Gebieten der Mathematik und gilt als einer der Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Jakob BERNOULLI

41. Prüfen Sie, welches der Zufallsexperimente als BERNOULLI-Kette aufgefasst werden kann.

    Geben Sie gegebenenfalls an, was als Treffer oder Niete interpretiert werden soll, und geben Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p sowie die Länge n der Kette an.
    a) 7-maliges Werfen einer LAPLACE-Münze.
    b) Gleichzeitiger Wurf von 7 LAPLACE-Münzen.
    c) 5-maliges Ziehen aus einer Urne mit 10 schwarzen und 15 weißen Kugeln mit Zurücklegen der gezogenen Kugel.
    d) Zahlenlotto und Fußballtoto.
    e) Beantwortung der 10 Fragen eines Tests, wenn zu jeder Frage fünf Alternativen angegeben sind, von denen genau eine richtig ist.

Seite 203

Bei einer BERNOULLI-Kette der Länge n mit dem Parameter p stimmt die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer mit der Wahrscheinlichkeit für genau $n - k$ Nieten überein:

$$P(\mathrm{T} = k) = P(\mathrm{N} = n - k).$$

42. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $B(n ; p ; k)$, wenn n die Kettenlänge, p die Trefferwahrscheinlichkeit und k die Trefferzahl der BERNOULLI-Kette bezeichnet. Vergleichen Sie Ihre rechnerischen Ergebnisse mit den Werten eines Tafelwerks.

    a) $B(5 ; \frac{1}{2} ; 3)$ b) $B(8 ; \frac{3}{5} ; 3)$

    c) $B(50 ; 0{,}02 ; 27)$ d) $B(100 ; \frac{2}{3} ; 12)$

43. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $B(n ; p ; k)$. Verwenden Sie ein Tafelwerk, falls dies möglich ist. Andernfalls müssen Sie selbst rechnen.

    a) $B(18 ; \frac{1}{3} ; 12)$ b) $B(20 ; \frac{1}{10} ; 17)$

    c) $B(11 ; \frac{1}{4} ; 10)$ d) $B(9 ; \frac{3}{7} ; 2)$

    e) $B(25 ; 0{,}4 ; 13)$ f) $B(15 ; \frac{5}{6} ; 9)$

Das Modell der BERNOULLI-Kette lässt sich in vielen anwendungsbezogenen Situationen verwenden.

Beispiel: Eine recht große Menge von Personen bestehe zu 40% aus Frauen und zu 60% aus Männern. Es wird fünfmal eine Person ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man

α) genau 2 Männer,

β) nur Männer?

Die Interpretation als BERNOULLI-Kette ergibt:

Treffer T: „Es wird ein Mann ausgewählt" ; $p = 0{,}6$; $n = 5$.

α) $P(\mathrm{T} = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}23040 \approx 23\%$

β) $P(\mathrm{T} = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}07776 \approx 7{,}8\%$

44. Eine Urne enthält 15 Kugeln, die von 1 bis 15 nummeriert sind. Es werden 10 Kugeln mit Zurücklegen aus der Urne gezogen; bei jeder Ziehung prüft man, ob eine Primzahl gezogen wurde. Begründen Sie, warum das Zufallsexperiment eine BERNOULLI-Kette ist. Geben Sie Treffer, Länge und Parameter an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau viermal eine Primzahl gezogen wird.

45. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, beim viermaligen Werfen einer idealen Münze
    a) dreimal Zahl und einmal Wappen zu erhalten,
    b) bei den ersten drei Würfen Zahl und beim letzten Wurf Wappen zu erhalten.

46. Ein Tennisspieler hat eine konstante Gewinnquote von 2/3 für jedes Spiel. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er von vier Spielen
    a) genau zwei Spiele gewinnt,
    b) alle Spiele verliert,
    c) mindestens ein Spiel gewinnt.

47. Bei der Endkontrolle von Farbfernsehgeräten müssen 5% der Geräte beanstandet und zu einer Nachbesserung zurückgegeben werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
    a) unter 10 geprüften Geräten kein defektes Gerät ist,
    b) unter 20 geprüften Geräten genau ein defektes Gerät ist,
    c) unter 20 geprüften Geräten mindestens ein defektes Gerät ist.

48. Zur Beurteilung der zukünftigen wirtschaftlichen Entwicklung geben jedes Jahr fünf Wirtschaftswissenschaftler (die so genannten 5 Weisen) eine Prognose ab. Es soll angenommen werden, dass sich die 5 Weisen unabhängig voneinander äußern und dass jeder die kommende wirtschaftliche Entwicklung mit 80% Sicherheit richtig einschätzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
    a) nur der erste und der dritte Weise richtig urteilen,
    b) alle Weisen richtig urteilen,
    c) man kein richtiges Urteil erhält,
    d) man wenigstens ein richtiges Urteil erhält?

49. Fritzchen spielt oft Schach gegen seinen Freund Max. Beide Freunde besitzen die gleiche Spielstärke. Fritzchen glaubt, dass die beiden folgenden Ereignisse E_1 und E_2 gleichwahrscheinlich sind. Hat er damit Recht?

    E_1: Er gewinnt 5 von 9 Spielen.

    E_2: Er gewinnt 10 von 18 Partien.

50. Bei einem Multiple-Choice-Test werden 10 Fragen gestellt. Zu jeder Frage werden 4 Antworten angeboten, wobei nur bekannt ist, dass mindestens eine Antwort richtig und mindestens eine falsch ist.
    a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer einzelnen Frage die richtige Lösung durch reines Raten zu finden.
    b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit bei reinem Raten für die Ereignisse
        α) keine richtige Antwort,
        β) genau 5 richtige Antworten,
        γ) mindestens eine falsche Antwort.